APÊNDICE E – PRODUTO EDUCACIONAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS NATURAIS E MATEMÁTICA

História, Tecnologias e Matemática: Uma Aliança Potencial para conteúdos do 8° Ano.

Alison Luan Ferreira da Silva
Giselle Costa de Sousa

UFRN
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

PPGECNM
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

História, Tecnologias e Matemática: Uma Aliança Potencial para conteúdos do 8° Ano.

Alison Luan Ferreira da Silva
Giselle Costa de Sousa

Natal – Rio Grande do Norte
2019

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO.....4
2 FUNDAMENTOS PARA ABORDAGEM DA PROPOSTA.....8
2.1 USO DA HM ARTICULADA POR TDIC E IM NO ENSINO DE MATEMÁTICA..... 8
2.2 A BNCC E AS UNIDADES TEMÁTICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS.....10
3 ORIENTAÇÕES AOS DOCENTES.....16
3.1 ORIENTAÇÕES GERAIS.....17
3.2 ORIENTAÇÕES PARA A UNIDADE DE NÚMEROS, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.....17
3.3 ORIENTAÇÕES PARA A UNIDADE DE ÁLGEBRA E GEOMETRIA.....18
3.4 ORIENTAÇÕES PARA A UNIDADE DE GRANDEZAS E MEDIDAS.....20
4 BLOCO DE ATIVIDADES.....22
4.1 BLOCO I: INVESTIGAÇÃO-HISTÓRICA-COM-TECNOLOGIA PARA A UNIDADE DE NÚMEROS, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO 8º ANO..... 23
4.2 BLOCO II: INVESTIGAÇÃO-HISTÓRICA-COM-TECNOLOGIA PARA A UNIDADE DE ÁLGEBRA E GEOMETRIA NO 8º ANO.....32
4.3 BLOCO III: INVESTIGAÇÃO-HISTÓRICA-COM-TECNOLOGIA PARA A UNIDADE DE GRANDEZAS E MEDIDAS NO 8º ANO.....43
REFERÊNCIAS 50

1. APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a)

Este caderno de atividades é parte da composição final da Dissertação intitulada: História da Matemática, Tecnologias Digitais e Investigação Matemática no Ensino de Unidades Temáticas de Matemática da BNCC para o 8° ano do Ensino Fundamental. Vinculada a linha de pesquisa História, Filosofia e Sociologia da Ciência e pertencente ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

Trata-se de um produto educacional que aborda problemas de História da Matemática (HM) associada as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) em articulação com a Investigação Matemática (IM) de acordo com as unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para as turmas do 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais. De fato, formulamos um caderno de atividades baseado em problemas históricos de Matemática para as turmas do referido nível de ensino de forma a trabalhar as unidades elencadas na BNCC de modo articulado, unindo-as de forma conveniente como a própria BNCC recomenda. Para isso trazemos três blocos em que o 1° articula a unidade de Números com a unidade de Probabilidade e Estatística, enfatizando o conteúdo do Princípio multiplicativo da contagem embasado no tema histórico do Princípio das gavetas de Dirichlet, o 2° bloco articula a unidade de Álgebra com a unidade de Geometria enfatizando os conteúdos de transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação embasado no tema histórico de simetria no plano cartesiano e o 3° bloco aborda a unidade temática de Grandezas e Medidas enfatizando os conteúdos de Área de figuras planas embasado no tema histórico da quadratura do círculo.

A escolha em se trabalhar a BNCC ocorreu visto que é a primeira vez que o Brasil elaborou uma Base Nacional Comum Curricular que explicita todos os direitos de aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental e que servirá de referência para a construção de todos os currículos das redes públicas e privadas deste país.

Buscamos mediante a HM meios para tornar o ensino-aprendizagem da Matemática mais significativo. De fato, conforme Nunes, et al (2010), a história pode atuar como um elemento propiciador de uma aprendizagem significatica, fornecendo métodos para os professores, propiciando aos seu alunos uma melhor comprrênsão da

Matemática, tendo como base alguns episódios ou problemas matemáticos históricos trabalhados em sala de aula. Reconhecendo esse ensino significativo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 295) esclarece que "Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria História da Matemática".

Portanto, as principais hipóteses para o uso da HM em sala de aula são: mostrar as razões por que as pessoas estudam Matemática; as necessidades sociais, econômicas e físicas que estimulam a produção Matemática; mostrar que a Matemática é uma criação humana; fonte de diversos problemas; métodos de resolução de problemas; desmistificar a Matemática; estimular a não alienação de seu ensino, dentre outros.

Contudo, mesmo com essa relevância atribuída à HM, acreditamos que a mesma ainda pode ser potencializada se integrada a outras tendências da Educação Matemática através do uso das TDIC, por exemplo, visto que, estamos numa sociedade cada vez mais impregnada de tecnologia e ainda que a própria BNCC reconhece a relevância do ensino da Matemática mediante o uso dos recursos das TDIC.

De fato, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 263) reconhece o uso da tecnologia em sala de aula ao afirmar que se deve "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados". Assim, consideramos que o potencial atribuído ao uso das TDIC, ao resolver problemas do cotidiano, sociais e de outras áreas, podem ser usados para otimizar a abordagem dos problemas históricos escolhidos

Além disso, cremos que as atividades realizadas pelos alunos nas aulas de Matemática devem ter suporte na investigação e na exploração, pois assim a Matemática fluirá de modo natural no pensamento dos alunos, isto é, surgindo dos erros e dos acertos num processo construtivo e de (re)descoberta, visto que a própria BNCC (BRASIL, 2017, p. 261) entende que "[...] espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações". Assim, o aluno é o investigador matemático de problemas históricos via TDIC, considerando a perspectiva colocada por Ponte, Brocado e Oliveira (2016), os

quais afirmam que investigar é procurar respostas para o que não se sabe. Trazendo para o campo matemático, ou seja, "Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p. 13).

Consideramos, pois, uma Matemática podendo ser produzida pelo aluno em processo de redescoberta, inspirado na história, como o matemático fez em seu desenvolvimento original, simulando situações/problemas históricos que podem ser investigados com/em ambientes/recursos tecnológicos. Para tanto, concordamos com Ponte (2005) ao destacar que "o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p.23), que creditamos poder ser fortemente acionado com o apoio das TDIC com o coletivo pensante[1] e também com os pressupostos da HM[2].

Em suma, tendo em vista a importância já estabelecida do uso da HM isoladamente (como em MIGUEL; MIORIM, 2008), das TDIC de modo separado e atestado na literatura de referência da área (a exemplo de BORBA; PENTEADO, 2012), e ainda a relevância da IM para o ensino de Matemática que também é ressaltada em diversos trabalhos como o de Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), consideramos que é inquestionável o potencial de cada uma dessas tendências em Educação Matemática de modo independente. Contudo, creditamos que sua articulação pode ainda mais potencializá-las em prol do ensino de Matemática e, desse modo, buscamos ressaltar a História da Matemática a partir do que nomeamos como **investigação-histórica-com-tecnologia[3].**

---

[1] Relação do humano com o não humano proposta baseada na reorganização do pensamento apresentada por Tikhomirov (1981) a partir da extensão da memória defendida por Lévy (1993) apud Borba e Penteado (2012).

[2] Utilizando-se dos argumentos de Miguel e Miriom (2017) justificamos ainda o uso da HM na sala de aula pelo professor de Matemática devido a HM ser: Fonte de seleção de métodos adequados de ensino de diferentes tópicos de Matemática escolar; Fonte de seleção de tópicos, problemas ou episódios considerados motivadores de aprendizagem da Matemática escolar; Fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino-aprendizagem da Matemática escolar na atualidade; Fonte que possibilita a desmistificação da Matemática e a desalienação de seu ensino; Fonte que possibilita o mento de um pensamento crítico, de uma qualificação como cidadão e de uma tomada de consciência e de avaliação de diferentes usos sociais da Matemática; (MIGUEL; MIORIM, 2017, p. 61-62).

[3] É a união da Investigação Matemática com a História da Matemática e as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação em prol do ensino de Matemática. Essa união acontece a partir da abordagem de problemas históricos que podem ser investigados com o apoio de recursos tecnológicos.

Ao analisarmos a BNCC, constatamos que a mesma é organizada pelos cinco eixos estruturantes das Unidades Temáticas de Matemática do Ensino Fundamental Anos Finais da Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental - BNCC, a saber: **Números, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria e Probabilidade e Estatística.** Porém a própria BNCC (BRASIL, 2017, p.272) ressalta que "[...] é fundamental considerar que a leitura dessas habilidades não seja feita de maneira fragmentada" e complementa esclarecendo que "A leitura dos objetos de conhecimento e das habilidades essenciais de cada ano nas cinco unidades temáticas permite uma visão das possíveis articulações entre as habilidades indicadas para as diferentes temáticas" (BRASIL, 2017, p. 284). Com isto, entendemos que as Unidades Temáticas nela elencadas podem ser trabalhadas em conjunto.

Por este motivo, esse caderno tem três eixos estruturantes: o primeiro será o que articula a unidade de **Números** (unidade 1) e a unidade de **Probabilidade e Estatística** (unidade 5). A referida seleção se deu pela constatação de um objeto de conhecimento comum a essas unidades que consiste no **Princípio multiplicativo da contagem**. Para abordarmos esse objeto, realizamos um estudo histórico bibliográfico chegando ao **Problema das Gavetas de Dirichlet**, que, deste modo, será gerador de nossa investigação-histórica-com-tecnologia para o tratamento das unidades temáticas 1 e 5 da BNCC para o 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais.

O segundo eixo estruturante é composto pela união da unidade de **Álgebra** (unidade 2) e a unidade de **Geometria** (unidade 3) a partir do tema de **transformações geométricas no plano cartesiano**, que foi encontrado pelo estudo histórico bibliográfico. Assim, tal tema será gerador de nossa investigação-histórica-com-tecnologia para o tratamento das unidades temáticas 2 e 3 da BNCC para o 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais

O terceiro eixo estruturante deste caderno de atividades decorre da unidade de **Grandezas e Medidas** (unidade 4) que impulsionou um estudo histórico bibliográfico e nos levou a uma abordagem histórica de um dos três problemas clássicos da Geometria Euclidiana, **a quadratura do círculo**, também citada pela BNCC (BRASIL, 2017, p. 268) ao afirmar que "a equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam fazer a quadratura de uma figura). Portanto, decidimos que vamos abordar a

área de figuras planas por meio da quadratura do círculo como tema histórico, tratado com o apoio das TDIC via IM.

Deste modo decorre que o presente caderno de atividades tem três blocos nomeados: investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de Números, Probabilidade e Estatística no 8º ano; investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de Álgebra e Geometria no 8º ano; investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de Grandezas e Medidas no 8º ano, dos quais o primeiro refere-se ao eixo 1 o segundo ao eixo 2 e o terceiro ao eixo 3 supracitado.

2. FUNDAMENTOS PARA ABORDAGEM DA PROPOSTA

2.1 USO DA HM ARTICULADA POR TDIC E IM NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Queremos aqui, expor a fundamentação que permitiu o entrelaçamento da HM, das TDIC e da IM de tal modo que se tornassem tendências potenciais, comandadas pela História da Matemática num processo uno de aliança, com TDIC e IM que chamamos de **investigação-histórica-com-tecnologia.**

Para atingir nosso objetivo, selecionamos todos os pontos essenciais em comum dessas três tendências pedagógicas de Educação Matemática que resultou em uma **tabela** que servirá para mostrar como essas tendências convergem e podem ser trabalhadas em conjunto, de modo a potencializar ainda mais a relação ensino-aprendizagem da Matemática, já que separadamente elas já cumprem esse papel. Desse modo, a ideia é que esses fundamentos norteiem produções na direção de aliança entre HM, TDIC e IM, assim como orientou a referida proposta. Analisando as bases dessas tendências chegamos a 5 aspectos comuns, a saber: criação humana; fonte de geração do conhecimento investigativo; fonte de resolução de problemas; produção da Matemática genuína; e, por fim, que tanto a HM, quanto as TDIC e a IM interferem na relação ensino-aprendizagem da Matemática na sala de aula. Tais aspectos serão detalhados e apresentados adiante levando em consideração o que há em comum entre eles, desde os argumentos, passando pelos autores envolvidos, cada um no seu ramo de pesquisa (HM, TDIC e IM) e finalmente a relação com este caderno de atividades.

Quadro 1 - investigação-histórica-com-tecnologia

ASPECTOS	ARGUMENTOS	AUTORES	RELAÇÃO COM O PRODUTO EDUCACIONAL
Apresenta a Matemática como uma Criação Humana	A Matemática foi criada a partir da necessidade do homem. Demonstram que a Matemática é uma ciência em constante construção e que sofre alterações de acordo com a sociedade na qual está inserida.	Miguel e Miorim (2017); Fossa (2008); D'Ambrósio (1999); Mendes (2009); Roque (2012); Lévy (1999); Ponte, Brocado e Oliveira (2016).	Propomos atividades/problemas que exaltem a atividade matemática como um produto da atividade/cultura humana. Propomos atividades/problemas para que o aluno tenha a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais.
Promove a Geração do Conhecimento Investigativo	Construção do conhecimento por meio da investigação para que o aluno possa construir o conhecimento matemático e que esse conhecimento seja construído na forma de um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias	Fossa (2008); Ponte, Brocado e Oliveira (2016); Borba (2012); Borba e Penteado (2012).	Propomos atividades/problemas com itens, que contemplem problemas investigativos, como: 1. Título e informações básicas. 2. Textos exploratórios (vamos investigar o que? Conhecendo o tema). 3. Vamos explorar? (atividades) 4. Orientação para os docentes. 5. Dicas para os alunos.
Fonte de Proposição de Problemas	A Matemática se desenvolveu e continua a se desenvolver partindo da resolução de problemas. Mediante as atividades/problemas o aluno deverá levantar hipóteses e testar suas hipóteses, afim de achar a solução do problema.	Clairaut (1892); Meserve (1980) Roque (2012); Ponte, Brocado e Oliveira (2016); Valdés (2002); Ávila (2004); Ponte, Oliveira e Varanda (2003); Miguel e Miorim (2017)	O caderno que propomos é composto de problemas históricos a serem investigados com o apoio das TDIC via IM.
Simula o trabalho do Matemático (Matemática Genuína)	Permite ao aluno simular a atividade de um pesquisador matemático, não nos limites do conhecimento, mas tão rigoroso quanto possível.	Fossa (2008); Ponte, Brocado e Oliveira (2016); Borba e Penteado (2012).	Propomos atividades que estejam estruturadas de tal forma que o aluno se ache em uma situação existencial análoga à do pesquisador da Matemática trazendo para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, tratadas, especialmente, nos itens reflexões e testes das atividades.

Promover Interação aluno/professor na aula de Matemática	Transformação da relação ensino-aprendizagem devido a utilização da HM, TDIC e IM, mudança dos papeis arquétipos de professor e aluno frente ao conhecimento. Professor mediador aluno não receptor, mas ativo, produtor de conhecimento sob orientação.	Allevato (2005); Miguel e Miorim (2017); Ponte, Brocado e Oliveira (2016); Fossa, Mendes e Valdés (2006)	O produto educacional prevê um guia para o professor que o oriente frente ao papel que ele desenvolve e também para os alunos nas atividades.

Fonte: elaborado pelo autor

Os pressupostos nele revelados propõe, portanto, que a investigação-histórica-com-tecnologia deve ser feita mediante a realização de atividades que envolvam pesquisa histórica (de problemas) explorada num processo investigativo tal como o matemático do passado com ou sem tecnologia a fim de produzir conhecimento matemático. Desse modo, parte da premissa de estudo histórico que, em nosso caso, será desenvolvida sobre o alicerce das unidades temáticas da BNCC, a qual será detalhada a seguir.

2.2 A BNCC E AS UNIDADES TEMÁTICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL ANOS FINAIS.

Apesar da BNCC ser um documento recente, a sua seguridade vem da década de 60 pelas previsões da Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, que fixava as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. A Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, que rege as Diretrizes e Bases para o ensino do antigos 1º e 2º graus, tratava pela primeira vez na legislação educacional de núcleo comum, obrigatório e da parte diversificada em todo o Brasil. Na Constituição Federal de 1988, no seu art. 210, foi instituído o conceito da formação básica comum, associado à fixação de conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, que posteriormente é tratada na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), aprovada pela Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), resumem-se a explicar a base nacional comum, porém esse método não foi aceito pelo Conselho Nacional de Educação (CNE) que, logo em seguida (1998), emitiu as Diretrizes Curriculares Nacionais abrangendo tanto o Ensino Fundamental quanto o Médio, em decorrência da Lei nº.9.131/95, ambas anunciando a necessidade de se formular posteriormente uma base nacional comum. Depois da Emenda Constitucional nº 59, aprovada em 2009, o CNE emitiu uma diretriz geral para a Educação Básica (Resolução CNE/CEB nº 4/2010), e

diretrizes específicas para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos (Resolução CNE/CEB nº 7/2010) e para o Ensino Médio (Resolução CNE/CEB nº 2/2012). Todas estas diretrizes anunciam a necessidade da construção de uma base nacional comum. Assim sendo, a diretriz sobre a BNCC deve ser vista como uma decorrente complementação destas diretrizes. Essa complementação, necessidade que já estava presente nas resoluções do CNE, foi consagrada no texto da Lei nº 13.005/2014, que aprovou o novo Plano Nacional de Educação (PNE).

O documento elaborado pelo Ministério da Educação contendo a proposta da Base Nacional Curricular Comum apenas para a Educação Infantil e o Ensino Fundamental, foi encaminhado para o Conselho Nacional de Educação em 6/4/2017, após a aprovação da proposta foi encaminhado para realização de audiências públicas com o intuito de colher subsídios e contribuições na sua elaboração. Sendo homologada em 20 de dezembro de 2017 e segundo o CNE, as redes de ensino já podem e devem começar a trabalhar na implementação da política. A revisão de todos os currículos deve acontecer preferencialmente em 2019 e até o prazo máximo do ano letivo de 2020.

No que concerne a Matemática, a BNCC (*BRASIL, 2017, p.265)* apresentou oito competências a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental Anos Finas, são elas:

"1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.

2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).

7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles".

Para garantir o pleno desenvolvimento dessas competências, os componentes curriculares da BNCC, apresentam um conjunto de habilidades as quais relacionam-se com diferentes objetos de conhecimento que, agrupados, são organizados em unidades temáticas. Para Matemática, como dito, são 5 unidades (Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística).

A unidade de **Números** para o 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais tem por objetivo que o aluno desenvolva as habilidades de: efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na apresentação de números em notação científica; resolver e elaborar problemas usando a relação entre potência e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário; resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo; resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais; reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica. Destes escolhemos problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

A Unidade de **Álgebra** para 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais tem por objetivo que o aluno desenvolva as habilidades de: resolver e elaborar problemas que

envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações; associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano; resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso; resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes; identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes; identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano; resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas. Destes, escolhemos associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

A unidade temática de **Geometria** para o 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais tem por objetivo que o aluno desenvolva as habilidades de: demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos; construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares; descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso; aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas; reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. Destes, escolhemos reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

A Unidade de **Grandezas e Medidas** é concebida como o estudo das medidas e das relações entre elas, relações métricas ou geográficas. Em que as medidas são utilizadas na quantificação do mundo físico, sendo fundamental para que a realidade seja compreendida. Para o 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais o objetivo é que o aluno

desenvolva as habilidades de: resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos; reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes; resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular. Destas, escolhemos resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas

A unidade de **Probabilidade e Estatística** para o 8° ano do Ensino Fundamental Anos Finais tem por objetivo que o aluno desenvolva as habilidades de: calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1; avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa; classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões; obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude; selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feitas de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada); planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatórios que contenham os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados , destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões. Destes, escolhemos calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo.

Nessa ótica decidimos por um produto na nossa linha de trabalho (HM, TDIC e IM) que já se adeque a tais fins, em forma de um caderno de tarefas que esteja em plena consonância com a BNCC e que possa ser aplicado pelo professor em sala de aula, garantindo que ele esteja desenvolvendo as competências elencadas na BNCC, particularmente para o 8º ano.

De modo geral as atividades estão organizadas em 3 blocos, cada bloco contém os seguintes itens: título, objeto de conhecimento, habilidade da BNCC, exploração I –

atividades baseadas no texto histórico, e exploração II: atividades baseadas na investigação-histórica-com-tecnologia.

A seguir, serão apresentadas as atividades que formulamos para que os docentes e/ou educadores possam aplicá-las em suas aulas e demais atividades didáticas como uma alternativa para o ensino-aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

3. ORIENTAÇÕES AOS DOCENTES

Caro(a) professor(a) é de suma importância que você leia essas orientações antes de aplicar as atividades em sala de aula, pois aqui encontrará os objetivos das atividades, os conhecimentos prévios, a metodologia a ser utilizada na aplicação, a previsão da quantidade de aulas necessárias para aplicação, entre outras informações.

As atividades referentes as Unidades Temáticas estão distribuídas da seguinte forma:

- Iniciamos com uma atividade denominada exploração I: o aluno deverá fazer a leitura do texto com informações históricas seguido por perguntas/pesquisas referentes ao texto de forma reflexiva;
- Segundo, uma atividade denominada exploração II: essas atividades deverão ser resolvidas por meio da tecnologia para que possamos concretizar o ensino/aprendizagem dos alunos mediante as atividades com **investigação-histórica-com-tecnologia;**
- Por fim, a dinâmica de socialização e a produção dos relatórios para verificar se as habilidades foram atingidas.

Tal distribuição se justifica nos fundamentos da proposta que, como dito, se apoia no uso de HM, TDIC e IM. Desse modo, consideramos as etapas de uma aula de investigação matemática que segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2016), está dividida em três fases, podendo ser aplicadas em uma aula ou em um conjunto de aulas:

> i. Introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito (seção vamos investigar o que? Conhecendo o tema);
> ii. Realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com a turma toda (vamos explorar? Exploração I e Exploração II);
> iii. Discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (Dinâmica de grupo); (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p.25).

Destacamos o papel do professor, como é fundamental a presença de um maestro na apresentação de uma orquestra, assim é o professor perante a atividade sugerida, seu papel é determinante nesse tipo de aula. Para tanto, o professor deve agir dando autonomia aos alunos para não prejudicar a investigação realizada pelos alunos, porém deve intervir de modo que o trabalho dos alunos seja significativo e alcance o objetivo traçado no início da atividade investigativa. O docente também deve levar em consideração as necessidades particulares de cada aluno, por isso precisa manter uma interação equilibrada com toda a sala. Em suma, o professor, segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2016, p.47), deve

"desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles"

3.1 ORIENTAÇÕES GERAIS:

Aplicação: a aplicação deverá seguir os pressupostos de uma aula de **investigação-histórica-com-tecnologia** indicados a seguir:

- O professor deverá introduzir a atividade falando o tipo do assunto abordado, do tempo de sua aplicação, dos objetivos a serem alcançados e dividir a sala em pequenos grupos, de no máximo 4 pessoas (o modo de como esses grupos deverão ser divididos, será explicitado adiante) e fazer a leitura compartilhada da seção "vamos investigar o quê?" Conhecendo o tema.
- Na segunda fase das investigações, ao realizar a atividade, o grupo deverá levantar argumentos/hipóteses/conjecturas que respondam as perguntas da atividade, a parti da seção "vamos explorar?" Exploração I e Exploração II.
- Os grupos deverão apresentar os resultados encontrados aos colegas por meio de discussões em pequenos grupos;
- Por fim cada aluno deverá produzir um relatório para se verificar se as habilidades foram atingidas conforme consta na BNCC;

Divisão dos grupos:

No início da aplicação deste Caderno o professor deverá dividir a sala em grupos. Recomendamos que cada grupo tenha no máximo três alunos e o critério de divisão desses grupos fica a cargo do professor, ou seja, ele pode dividir os grupos por afinidade, por sorteio ou da forma que julgar mais apropriado. A socialização do resultado de cada grupo é indispensável nessa etapa de aprendizagem proposta por esse objeto, motivo pelo qual a divisão dos grupos ocorreu inicialmente.

3.2 ORIENTAÇÕES PARA A UNIDADE DE NÚMEROS E A UNIDADE DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.

Duração: 7 aulas de 50 minutos.

Conhecimentos prévios:

- Operações com números inteiros;
- Conceito de probabilidade e a fórmula de probabilidade;

Sugestões adicionais de aplicação:

- Caso o professor identifique que sua turma tenha deficiência nas operações com números inteiros e no conceito de probabilidade o professor pode fazer uma revisão antes da aplicação deste material.

- O professor pode aplicar um vídeo tutorial para familiarizar os alunos com o Excel, disponível no link: https://www.youtube.com/watch?v=cU7UWpL3PQY.
- O Excel é uma ferramenta paga, pois a mesma é integrante do pacote Microsoft Office, caso o professor não tenha acesso ao Excel, ele pode adaptar a atividade para ser trabalhada no software de planilha eletrônica *Calc* que faz parte do pacote *Libreoffice* do Linux sem prejuízos por parte do aluno na investigação da atividade. O pacote do *Libreoffice* pode ser encontrado para Download no link: https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/.
- Descubra um pouco mais sobre o *Libreoffice* no site Libreoofice.org ou diretamente no link: https://pt-br.libreoffice.org/descubra/libreoffice/.

Dicas para os alunos:

- Uma explanação sobre o assunto com exercícios resolvidos podem ser encontradas no site "Clubes de Matemática da OBMEP" disponível no link: http://clubes.obmep.org.br/blog/texto_002-principio-das-casas-dos-pombos/

- Um vídeo bastante interessante da série "Isto é MATEMÁTICA", apresenta como a matemática está presente em nossas vidas, neste caso, como o princípio dos pombos apresenta-se no nosso dia-a-dia. Está disponível no link: http://clubes.obmep.org.br/blog/video-020/

Relatório do Bloco I

Redija um relatório por meio de um texto contínuo escrevendo com suas palavras o que você entendeu nessa atividade de modo que você aborde os seguintes pontos:

i. O que é o princípio multiplicativo?

ii. Você consegue resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo?

iii. Você consegue calcular a probabilidade de um evento utilizando o princípio multiplicativo?

Para isso descreva tudo que você aprendeu no Bloco de atividades I

3.3 ORIENTAÇÕES PARA A UNIDADE DE ÁLGEBRA E UNIDADE DE GEOMETRIA.

Duração: 9 aulas de 50 minutos.

Conhecimentos prévios:

- Plano cartesiano;
- Coordenadas cartesianas;
- Conceito de função;
- Fórmula da função afim;

Sugestões adicionais de aplicação:

- Caso o professor identifique que a sua turma tenha deficiência nos assuntos de coordenadas e de função afim poderá fazer uma revisão desses assuntos antes da aplicação deste material.
- O professor pode aplicar um vídeo tutorial para familiarizar os alunos com o software GeoGebra disponível no link: https://youtu.be/jGnNEnsod_0.
- A versão utilizada nas atividades a serem desenvolvidas foi a 6.0.462.0. Disponível para Download no link: https://geogebra.br.uptodown.com/windows.

Dicas para os alunos:

- Usar a página "Sala de ajuda: Isometrias". Nesta página, pertencente ao Clubes de MATEMÁTICA da OBMEP, são apresentadas algumas definições e propriedades básicas de geometria, mais especificamente de transformações geométricas no plano cartesiano. Link: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-isometrias/

- Usar a página "Sala para leitura: Simetria uma breve apresentação". Nesta página encontramos de forma sucinta uma apresentação sobre o assunto de simetria. Link: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-para-leitura_008-simetria-uma-breve-apresentacao/

- Nos próximos links exploraremos a arte de *Escher,* pois é uma forma de se trabalhar as transformações geométricas em obras de artes atuais, fazendo com o aluno possa fazer um comparativo com as obras antigas que ele estudou neste caderno de atividades.

    - **Conhecendo Escher e suas obras:** http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-atividades-pavimentacao-sala-2/

    - **Vídeo Escher e a Geometria:** http://clubes.obmep.org.br/blog/video-6/

    - **Vídeo Inspirations:** Este vídeo é um curta-metragem do cineasta espanhol *Cristóbal Vila* que celebra a Arte Matemática de *Maurits Cornelis Escher*. Link: http://clubes.obmep.org.br/blog/video-007/

Relatório do Bloco II

Redija um relatório por meio de um texto contínuo escrevendo com suas palavras o que você entendeu nessa atividade de modo que você aborde os seguintes pontos

i. Você consegue associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano?

ii. Você consegue reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação)?

Para isso descreva tudo que você aprendeu no Bloco de atividades II.

3.4 ORIENTAÇÕES PARA A UNIDADE DE GRANDEZAS E MEDIDAS.

Duração: 5 aulas de 50 minutos.

Conhecimentos prévios:

- Operações com números reais;
- Figuras planas;
- Área de figuras planas;

Sugestões adicionais de aplicação:

- O professor pode aplicar um vídeo tutorial para familiarizar os alunos com o software GeoGebra disponível no link: https://youtu.be/jGnNEnsod_0.
- A versão utilizada nas atividades a serem desenvolvidas foi a 6.0.462.0. Disponível para Download no link: https://geogebra.br.uptodown.com/windows.

Dicas para os alunos:

- O Baricentro da Mente é um site da internet em que podemos encontrar mais algumas informações sobre o problema da quadratura.
    - A quadratura do triângulo está disponível no link: https://www.obaricentrodamente.com/2012/12/a-quadratura-do-triangulo.html
    - A quadratura do retângulo está disponível no link: https://www.obaricentrodamente.com/2012/12/a-quadratura-do-retangulo.html
    - A quadratura do círculo pelos egípcios está disponível no link: https://www.obaricentrodamente.com/2019/01/a-quadratura-do-circulo-pelos-egipcios.html

- Ver o vídeo “quadratura do círculo” por Antônio Aranha. Disponível no link: https://www.youtube.com/watch?v=zzl2Vgl7_8o

Relatório do Bloco III

Redija um relatório por meio de um texto contínuo escrevendo com suas palavras o que você entendeu nessa atividade de modo que você aborde os seguintes pontos

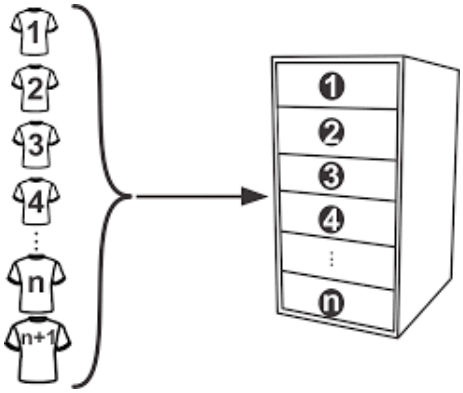
i. Você consegue resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área em situações como determinar medida de terrenos.

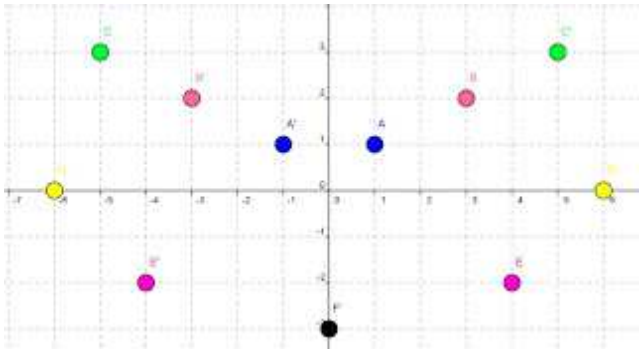
Para isso descreva tudo que você aprendeu no Bloco de atividades III

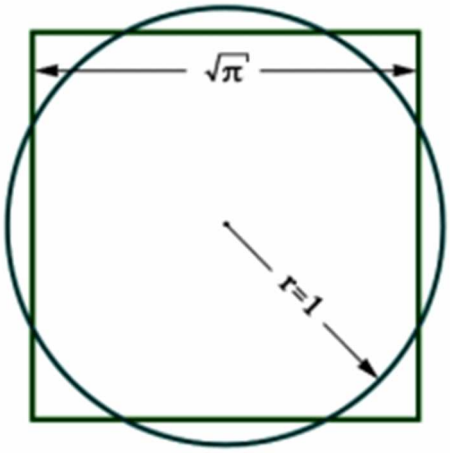
UFRN UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

PPGECNM Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

4. BLOCO DE ATIVIDADES





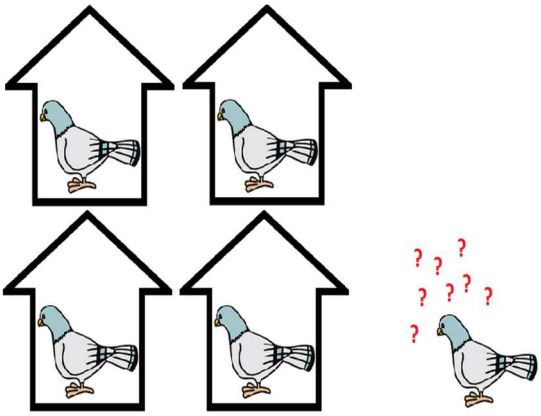


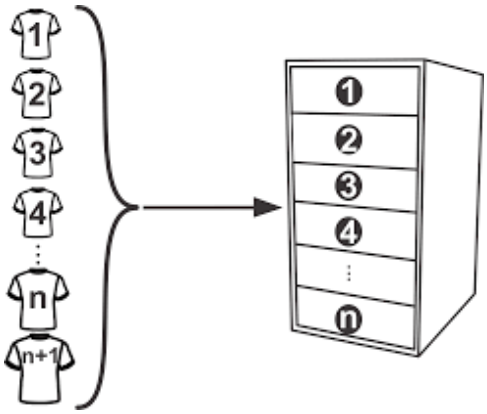
4.1 BLOCO I: INVESTIGAÇÃO-HISTÓRICA-COM-TECNOLOGIA PARA A UNIDADE DE NÚMEROS, PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA NO 8º ANO.

- **Objeto de Conhecimento**: o princípio multiplicativo da contagem.

- **Habilidade**: Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo; calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

- **Objetivos:** Apresentar o contexto histórico do surgimento do princípio da casa dos pombos; apresentar aos alunos o princípio da casa dos pombos; resolver problemas que envolvam a aplicação do princípio multiplicativo; calcular a probabilidade de eventos; resolver um problema histórico por meio das TDIC;





VAMOS INVESTIGAR O QUE? CONHECENDO O TEMA.

TEXTO EXPLORATÓRIO I

A primeira menção que temos deste princípio data do ano de 1622, em um livro de Matemática escrito por Jean Leurechon. Nesse livro aparece a seguinte frase: “Desnecessário será dizer que dois homens têm o mesmo número de cabelos, moedas de ouro e similares”.

A segunda menção foi em 1624 no livro intitulado Recreação Matemática escrito por Jean Appier Hanzelet em que se utiliza a seguinte frase: “é absolutamente necessário que dois homens tenham tantos cabelos ou pistolas quanto o outro”.

A terceira menção ao princípio da casa dos pombos foi encontrada em 1625. Nela, Marin Mersenne que copiou várias proposições sobre aritmética de Jean Leurechon, inclusive este principio, sendo encontrada a seguinte frase: “é necessário que dois homens tenham tanto cabelo, e outras coisas um como o outro”.

A quarta menção ocorreu 1737 Charles-Irénée de Saint-Pierre no livro de moralidade e política. Depois de Charles-Irénée de Saint-Pierre, o princípio só vem a ser utilizado pelo próprio Dirichlet em 1842, em seu teorema sobre a aproximação diofantina

A HISTÓRIA DO PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, matemático, nasceu em 13 de fevereiro de 1805 em Düren, entre as cidades de Aachen e Colônia, região que nesta época era império francês, atualmente região Alemã. A ele é atribuído a criação do princípio da casa dos pombos. Segundo Hefez (2007, p.68) podemos enunciar o referido problema da seguinte forma: *“Seja dada uma casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se m > n, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo”*

e em pesquisas de formas quadráticas com coeficientes indeterminados complexos.

Posteriormente a Dirichlet, o princípio é utilizado por diversos autores, contudo a frase princípio *pigeonhole,* que traduzindo para português significa princípio da casa dos pombos, o qual é sinônimo de princípio das gavetas de Dirichlet, só foi utilizada, pela primeira vez, pelo matemático Raphael M. Robinson, em 1940, em um artigo sobre a Aproximação Simultânea de Dois Números Reais.

Percebemos que o princípio das gavetas de Dirichlet já era utilizado pelo menos 2(dois) séculos antes de Dirichlet, como comprovamos nas obras de Jean Leurechon. Porém esse princípio não tinha nenhum nome específico e nem sempre se relacionava ao contexto matemático, aparecendo no livro intitulado: **livros de moralidade e política** de Saint-Pierre. Contudo, foi Dirichlet que fez uso, sobretudo matemático, desse princípio na construção da teoria dos números, principalmente no desenvolvimento das esquações diofantinas, entretanto esse princípio continuava sem um nome específico. Foi só em 1940 na obra de Robinson que o princípio foi chamado de *pigeonhole principle* o qual, segundo Carvalho (1997) com a tradução, temos: *Pigeon*, em português, é 'pombo', e *pigeonhole*, 'buraco de pombo'. No sentido figurado, a palavra é usada para designar um pequeno compartimento para guardar papéis ou cartas, um escaninho. O verbo *to pigeonhole*, significa classificar algo ou alguém, como colocando-o em pequenos compartimentos ou categorias, normalmente de forma rígida e sem saber muito a respeito da pessoa ou da coisa em questão.

Como o pai de Dirichlet era um agente dos correios e os móveis com compartimentos/gavetas são comumente utilizados para armazenar ou classificar as coisas em várias categorias (como cartas em correios ou chaves de um hotel) acreditamos ser esse o motivo do princípio ser conhecido como princípio das gavetas de Dirichlet.

Percebemos que a utilização do princípio das gavetas de Dirichlet, ocorreu em diversos contextos que vai desde livros de proposições/problemas matemáticos, passando por livros de moralidade e política isso nos séculos XVII e XVIII, até que, no século XIX, Dirichlet direciona esse princípio para utilizá-lo na construção da teoria dos números, mais precisamente na teoria das formas quadráticas relacionando-o com os números complexos, ampliando e generalizando.

VAMOS EXPLORAR?

EXPLORAÇÃO 1

Utilizando o texto anterior que aborda um pouco da história do princípio da casa dos pombos, responda os itens a seguir:

a) Quem foi Dirichlet?

_____
_____
_____
_____

b) Qual relação tem o princípio da casa dos pombos com o pai de Dirichlet?

_____
_____
_____
_____

c) O princípio da casa dos pombos foi realmente inventado/desenvolvido por Dirichlet?

_____
_____
_____
_____

d) Analisando a frase utilizada por Jean Leurechon em 1622 "Desnecessário será dizer que dois homens têm o mesmo número de cabelos, moedas de ouro e similares" você consegue relacioná-la com o princípio das casas dos pombos?

_____
_____
_____
_____

e) O texto afirma que o princípio das gavetas de Dirichlet foi usado em outros contextos que não na Matemática, pesquise que contextos seriam esses e coloque aqui suas conclusões. Para isto, utilize a internet.

_____
_____

_____
_____

f) Como se conhece o princípio hoje? Dê um exemplo de um enunciado e compare com o de antes.

_____
_____
_____
_____

g) Sabendo que a probabilidade de um evento ocorrer é a razão do número de casos favoráveis sob o número de casos possíveis, investigue a relação do conceito de probabilidade com o princípio das gavetas de Dirichlet. Para isto, utilize a internet. Quais as conclusões de sua investigação?

_____
_____
_____
_____
_____

h) Em 1624, Jean Appier Hanzelet utiliza a seguinte frase: "é absolutamente necessário que dois homens tenham tantos cabelos ou pistolas quanto o outro" e para justificá-la utiliza o seguinte argumento:

> "É certo que há mais homens no mundo do que o número de cabelos ou pistolas do homem mais rico: e já que não sabemos exatamente quantos homens existem, nem o número de cabelos do homem mais cabeludo, levando em consideração que todos tem números finitos para os outros igualmente finitos, vamos supor que existem 100 homens e que a maioria deles tem apenas 99 cabelos. Eu também poderia levar 2 ou 3 centenas de milhões de homens e cabelos, mas por uma questão de simplicidade eu escolho números menores, o que não afeta a demonstração. Portanto, uma vez que há mais homens do que cabelos em qualquer um deles, vamos considerar 99 homens e dizer: ou estes 99 todos têm um número diferente de cabelos, ou existem alguns que são iguais. Se você disser que alguns são iguais, então minha proposição é verdadeira. Se você disser que eles são diferentes, então é necessário que alguém tenha apenas um cabelo, outro dois, outros 3, 4, 5 e assim para os outros até o 99º. E como muitos terão o centésimo? Como posto, ele não pode ter mais de 99; portanto, é necessário que ele tenha algum número menor de 100, então, necessariamente, dois homens têm tantos cabelos quanto o de outros. Da mesma forma, poderíamos concluir que é necessário que dois pássaros tenham tantas penas, dois peixes muitas escamas, duas árvores muitas folhas, flores ou frutas, e talvez tantas folhas, flores e frutas ao mesmo tempo, desde que o número de árvores seja grande suficiente. Além disso, poderíamos apostar que uma assembléia de cem pessoas em que ninguém tem mais de noventa e nove pistolas, necessariamente, dois deles têm tantos quanto os outros. Também poderia ser dito que um livro, desde que seu número de páginas é maior que o número de palavras contidas em qualquer página, é necessário que duas

> páginas possam ser encontradas com o mesmo número de palavras, etc" (HANZELET, 1624, p.131, tradução nossa).

Qual a probabilidade que dois homens tenham a mesma quantidade de fios de cabelo, explique?

_____

_____

_____

_____

EXPLORAÇÃO 2

Observe a passagem feita por Charles-Irénée de Saint-Pierre (1737), escritor, diplomata e acadêmico francês, precursor da filosofia do Iluminismo, em sua obra intitulada *Ouvrajes de morale et de politique*, (que significa livros de moralidade e política), sobre o princípio das gavetas de Dirichlet:

> [...] eu disse a ele que um dia eu poderia apostar e provar que havia pelo menos dois habitantes em Paris que tinham até um certo número de cabelos, embora eu não pudesse identificar quem eram esses dois homens. Ela me disse que eu nunca poderia ter certeza até depois de contar o cabelo desses dois homens. (CHARLES-IRÉNÉE DE SAINT-PIERRE, 1737, p.88)

Vale ressaltar que, no livro de Saint-Pierre, o princípio das gavetas de Dirichlet foi utilizado sem a necessidade de estar inserido em um contexto matemático propriamente dito. Na verdade Saint-Pierre, neste livro, faz uma representação Misógina da madame Longueville, como uma mulher incapaz de entender até mesmo a ciência mais básica.

a) Explique o que você entendeu sobre o princípio, segundo Charles-Irénée de Saint-Pierre.

_____

_____

_____

_____

b) Utilizando o *software* Excel, tente argumentar que CHARLES-IRÉNÉE DE SAINT-PIERRE poderia defender sua afirmação de que poderia apostar e provar que havia pelo menos dois habitantes em Paris que tinham até um certo número de cabelos, embora eu não pudesse identificar quem eram esses dois homens para tanto:

i. Observe que a quantidade de cabelos do ser humano, segundo a ciência, varia de acordo com a idade, pois com o passar do tempo todo mundo perde cabelo. Entre 20 e 30 anos, a cabeça humana tem, em média, 615 fios por centímetro quadrado, o que aproximadamente quer dizer 150 000 fios. A população francesa do século XVIII está estimada entre 8 e 9 milhões de pessoas.

ii. Comecemos investigando uma quantidade menor de pessoas e de fios de cabelos e aumente posteriormente. Assim, imagine que, nesta época, cada pessoa tenha 10 fios de cabelos e que na França existiam 11 pessoas. Investigue, com a ajuda do Excel, se pelo menos duas pessoas possuem a mesma quantidade de fios de cabelo. Para tanto:

<u>Procedimentos:</u>

1. Abra o *software* Excel;
2. Na célula A1 digite "F1" indicando a pessoa com um fio de cabelo

	A
1	F1

;

3. Posicione o mouse no canto inferior direito da célula A1 até o ponteiro do mouse virar um sinal de **+** e arraste para baixo até a célula 10, ficando da seguinte forma:

	A
1	F1
2	F2
3	F3
4	F4
5	F5
6	F6
7	F7
8	F8
9	F9
10	F10

4. Na célula B1 digite P1

	A	B
1	F1	P1

, na célula B2 digite P2 e assim sucessivamente até chegar na célular B10 onde deverá constar o termo P10. A letra P designa pessoa, logo P1 quer dizer, pessoa 1, o P2, significa pessoa 2 e assim por diante.

	A	B
1	F1	P1
2	F2	P2
3	F3	P3
4	F4	P4
5	F5	P5
6	F6	P6
7	F7	P7
8	F8	P8
9	F9	P9
10	F10	P10

5. Por fim, tente colocar o pessoa 11 “P11” em uma das células já utilizadas sem que a mesma já esteja usada.

É possivel que a pessoa 11, no caso o “P11” fique sozinha em uma das células? Justifique sua resposta. Qual a probabilidade de duas pessoas terem o mesmo número de fios de cabelos?

_____

_____

_____

_____

_____

_____.

a) Repita o processo do item anterior analisando que o ser humano tenha no máximo 50 fios de cabelo e existam 51 franceses no século XVIII. É possível que fiquem apenas uma pessoa por célula? Qual a probabilidade que todas as pessoas tenham números de fios cabelos diferentes?

_____

_____

_____

_____

_____.

b) Analisando que o ser humano tem 150 000 fios de cabelos e que no século XVIII, quando Charles-Irénée de Saint-Pierre escreveu o livro, existiam 9 milhões de franceses,

utilize do princípio da casa dos pombos, formule hipótese/conjecturas para defender a afirmação do referido autor.

_____

_____

_____

_____

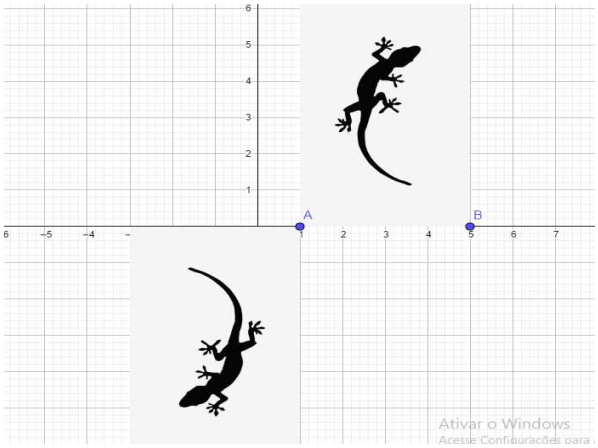
_____.

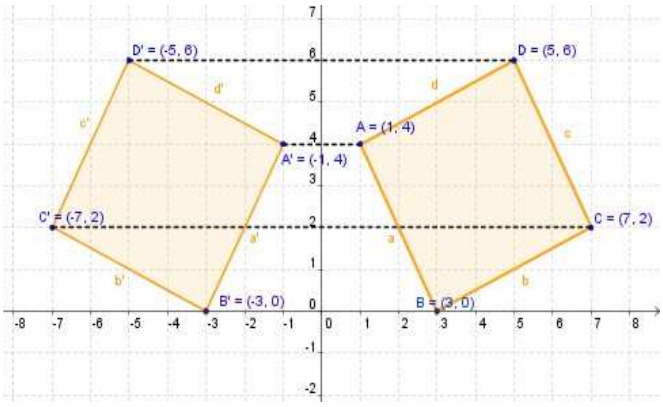
4.2 BLOCO II: INVESTIGAÇÃO-HISTÓRICA-COM-TECNOLOGIA PARA A UNIDADE DE ÁLGEBRA E GEOMETRIA NO 8º ANO.

- **Objeto de Conhecimento**: Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano; transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.

- **Habilidade**: Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano; reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

- **Objetivos:** Apresentar o contexto histórico do surgimento do plano cartesiano e da simetria; apresentar aos alunos as isometrias; resolver problemas que envolvam as isometrias; resolver um problema histórico por meio das TDIC;





O QUE É UM PLANO CARTESIANO?

O plano cartesiano consiste em um plano com dois eixos perpendiculares, x e y. o horizontal x é denominado **eixo das abscissas** e o vertical y, **eixo das ordenadas**. Os eixos x e y se cruzam em um ponto denominado origem. Esses eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões (quadrantes). Assim, para localizar um ponto P nesse sistema, utilizamos coordenadas cartesianas. Essas coordenadas correspondem a um par ordenado (a, b), com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, em que a é a abscissa e b, a ordenada.

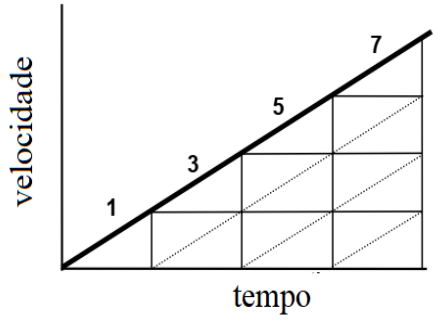
VAMOS INVESTIGAR O QUE? CONHECENDO OS TEMAS.

TEXTO EXPLORATÓRIO I

Antigamente a ideia de coordenadas foi usada pelos egípcios e romanos na agrimensura e pelos gregos na confecção de mapas. Também no planejamento das cidades, por exemplo, os romanos consideravam dois eixos perpendiculares a que se referiam a futura posição de casas, praças, estradas, entre outras. Atualmente ele é utilizado para determinar a posição de pessoa/lugar/objeto/fenômeno na superfície da terra, a exemplo do jogo de xadrez em que é usado para determinar a localização das peças no tabuleiro por números e letras, bem como na arquitetura/artes por meio da simetria, entre outros exemplos.

Um dos primeiros autores a utilizar as coordenadas em seus trabalhos foi Nicole Oresme (1320-1382) que representou graficamente como um elemento descritivo da variação de uma magnitude em função de outra magnitude, ou seja, Oresme confrontou a variável dependente (latitude), que é proporcional à intensidade ou amplitude do fenômeno, seja velocidade, calor ou outros, com a independente (longitude), que é tempo ou espaço, à medida que ele permitia que esta última fosse sofrendo

pequenos acréscimos. Para descrever um movimento de um objeto móvel, Oresme representa graficamente a velocidade do móvel em função do tempo em uma reta horizontal, carregada de graduações de segmentos equivalentes ao tempo e sobre eles, eleva segmentos perpendiculares de comprimentos equivalentes à velocidade do móvel no instante correspondente, conforme segue:



Descartes escreveu em 1637 um tratado sobre ciência intitulado *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences,* que significa, discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências. Três apêndices para este trabalho foram *La Dioptrique* (A Dióptrica), *Les Mètéores* (Os Meteoros) e *Géométrie* (Geometria).

La Géométrie é um trabalho compreensível independentemente dos seus estudos filosóficos. Nele, Descartes estabeleceu equivalências entre operações algébricas e construções geométricas. Para isso, introduziu um comprimento unitário que serviu de referência para todos os outros comprimentos e para todas as operações entre eles. Nesta obra, ele não usa a notação de Viète (1540-1603) que designava grandezas conhecidas pela letra A e as desconhecidas pelas vogais E, I, O, U e Y, e os termos dados pelas letras B, G, D, entre outras consoantes. Mas denota variáveis por letras no final do alfabeto *(x, y, z)* e parâmetros por letras no início do alfabeto *(a, b, c)*. Além disso, usa notação exponencial para indicar potências de x (x^2, x^3,...). Um marco é que nesse trabalho, ele utiliza o conceito de coordenadas cartesianas do modo que é ensinado atualmente, detalharemos melhor esse conceito posteriormente.

Neste trabalho, Descartes soluciona pela primeira vez o Problema de Pappus que é considerado por Roque (2012) e Bos (2001) a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica e, consequentemente do plano cartesiano.

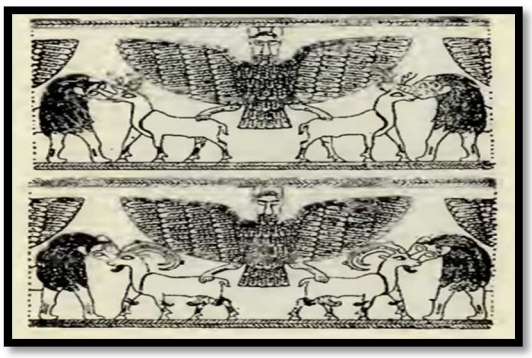
O QUE É SIMETRIA?

A simetria é uma das ideias pelas quais o homem através dos tempos tentou compreender e criar ordem, beleza e perfeição, partindo da noção um tanto vaga que simetria poder ser vista como uma igualdade de harmonia e proporções. Segundo Stewart (2012, p. 8, itálico do autor) "simetria não é um número nem um formato, é um tipo especial de *transformação* – uma maneira de mover um objeto. Se o objeto parecer o mesmo depois de movido, a transformação aí presente é uma simetria".

TEXTO EXPLORATÓRIO II

A simetria foi primeiramente constatada em desenhos, pinturas, esculturas e construções de povos antigos. Um dos exemplos mais antigos que podemos citar em relação as transformações geométricas é a pintura rupestre do Abrigo de *Rock El Buey* na Bolívia, situada na fronteira dos departamentos de Cochabamba e Santa Cruz. Ela exibe uma grande variedade de pinturas, provavelmente todas pertencentes a um período pré-hispânico.

A figura a seguir é uma imagem no vaso de prata do Rei sumério Entemena. Observamos que ao traçarmos uma reta vertical dividindo a águia com cabeça de leão ao meio, a imagem do lado esquerdo é uma reflexão da imagem do lado direito, retratando a propriedade fundamental da simetria bilateral.



Observe exemplos de simetria na arte persa e bizantina respectivamente:

Esfinges esmaltadas do palácio de Dario em Susa, construído nos dias de Maratona.

Representação da Eucaristia, como nesta patente bizantina, na qual dois cristos simétricos estão enfrentando os discípulos.

Finalizamos com uma representação do mosaico da ascensão do Senhor na catedral de Monreale, na Sicília, século XII da era cristã.

Porém sua formalização matemática é atribuida a Galois e a sua teoria dos grupos no século XIX.

Foi Galois que estabeleu uma relação entre grupos e equações polinomoais, determinando assim, uma condição necessária e suficiente para uma equação ser resolvida por radicais.

Foram os sucessores de Galois (1811-1832), que acabaram percebendo que a relação entre grupos e simetria é mais fácil de ser compreendida por meio da geometria.

VAMOS EXPLORAR?

EXPLORAÇÃO 1

Utilizando os textos anteriores que abordam um pouco da história do plano cartesiano e da simetria, responda os itens a seguir:

1.1 Para responder o item *a*, o item *b* e o item *c*, utilize o texto exploratório I como base.

a) O que são coordenadas? Inspirado na exploração histórica, diga com suas palavras para que servem as coordenadas. Cite três formas em que a ideia de coordenadas era utilizada por civilizações antigas e três formas de como a ideia de coordenadas é utilizada atualmente.

_____

_____

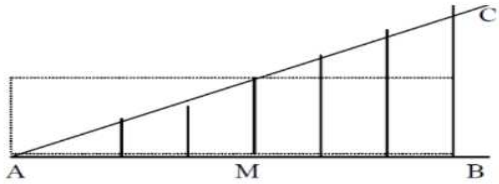
_____

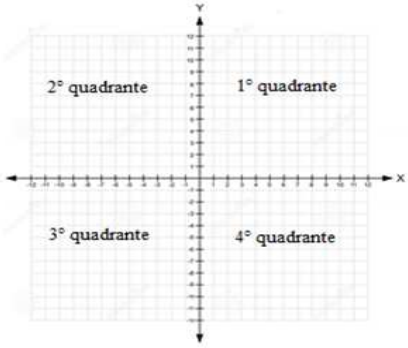
_____

Leia atentamente a passagem retirada do texto I:

"Um dos primeiros autores a utilizar as coordenadas em seus trabalhos foi Nicole Oresme (1320-1382) que representou graficamente como um elemento descritivo da variação de uma magnitude em função de outra magnitude, [...] Oresme representa graficamente a velocidade do móvel em função do tempo em uma reta horizontal carregada de graduações de segmentos equivalentes ao tempo e, sobre eles eleva segmentos perpendiculares de comprimentos equivalentes à velocidade do móvel no instantes correspondentes".

A imagem a esquerda é uma ilustração gráfica da variação de magnitudes elaborada por Oresme e a da direita é uma representação atual do plano cartesiano:





b) Na sua opinião, existe alguma semelhança da ilustração gráfica da variação de magnitudes elaborada por Oresme com o plano cartesiano atual ?

_____

_____

_____

_____

c) Quem foi o primeiro a utilizar o conceito de coordenadas cartesianas do modo que é ensinado atualmente? E em qual obra e problema esse conceito foi utilizado?

_____

_____

_____

_____

1.2 Para responder o item d, o item e e o item f, utilize o texto exploratório II como base.

d) O que é a simetria?

_____

_____

_____

_____

e) Qual tipo de simetria mais aparece nas imagens do texto?.

_____

_____

_____

_____

f) O surgimento da simetria se deu por meio de pinturas? Explique.

_____

_____

g) O texto mostrou alguns tipos de simetria, algumas foram listadas e exemplificadas. Há outros? Pesquise e indique quais. Em seguida, faça um desenho para ilustrar.

EXPLORAÇÃO 2

2.1 Pela leitura do texto exploratório II, concluímos que a simetria era utilizada em pinturas e construções muito antes de ser formulada matematicamente por Galois. Utilizando o *software* GeoGebra reproduza a simetria da Esfinge esmaltada do palácio de Dário em Susa.

Procedimentos:

1. Arraste a imagem a seguir e solte no Geogebra (observe que a fígura ficará posicionada em duas coordenadas, geralmete no ponto A e B);

2. Arraste a fígura no plano cartesiano de modo que o ponto B fique sobre a coordenada (0,0)
3. Na barra de ferramentas marque a opção "reflexão" em relação a uma reta;
4. Selecione a imagem e depois o eixo y.

a) O que aconteceu com a imagem? Qual o eixo de simetria da imagem?

_____

_____

_____

_____

b) Observando o que aconteceu logo após os procedimentos anteriores, você consegue explicar o que significa refletir uma figura no plano cartesiano?

_____

_____

_____

_____

_____

c) Foi pedido para que o ponto B fosse posicionado sobre as coordenadas (0,0). Você sabe dizer o por quê?

_____

_____

_____

_____

d) Analisando as coordenadas da fígura e as coordenadas da sua reflexão, o que podemos concluir?

_____

_____

_____

_____

2.2 Antes de iniciarmos a pesquisa na internet o que são grandezeas e o conceito de função afim. Após a pesquisa no GeoGebra, selecione na barra de ferramentas a opção "retas", na janela de visualização clique em (1,2) e (3,4).

a) Observe que na Janela de álgebra aparecerá uma equação. Na sua opinião, qual a relação entre a equação e as coordenadas (1,2) e (3,4)?

_____

_____

_____

_____

b) Na barra de ferramentas selecione a opção "vetor", traçando o vetor na janela de visualização; novamente na barra de ferramentas marque a opção "translação por um vetor", clique na imagem e depois no vetor para que a fígura seja transladada. O que aconteceu com a reta que foi transladada? Essa reta tem uma nova equação? Observando o que aconteceu logo após os procedimentos anteriores, você consegue explicar o que significa transladar uma fígura no plano cartesiano?

_____

_____

_____

_____

_____

2.3 Rotacionando um reta cujas coordenadas são os pontos A(0,2) e B(3,2), definida pela equação y = 2.

Procedimentos:

1. Marque a opção "reta" na barra de ferramentas do Geogebra;
2. Na janela de visualização marque os pontos A e depois o B conforme as coordenadas: A(0,2) e B(3,2).
3. Novamente na barra de ferramentas marque a opção "rotação em torno de um ponto";
4. Selecione a reta e depois o ponto B, na caixa de diálogo que abrirá, selecione a opção sentido horário e o ângulo 90°.

a) Houve alteração na direção e no sentido da reta após a rotação? Explique.

_____

_____

_____

b) O que aconteceria se a roração fosse de 180° no sentido horário?

_____

_____

_____

c) Observando o que aconteceu logo após os procedimentos anteriores, você consegue explicar o que significa rotacionar uma reta plano?

_____

_____

_____

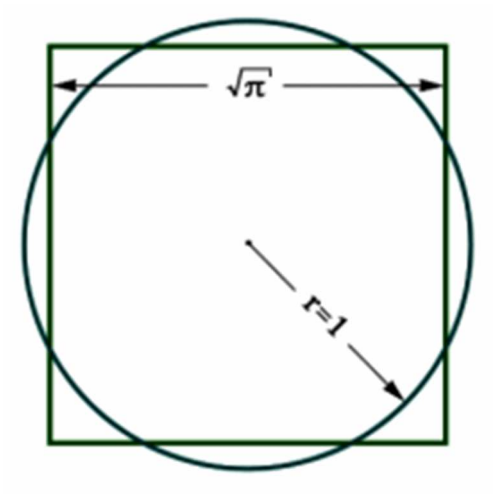
_____

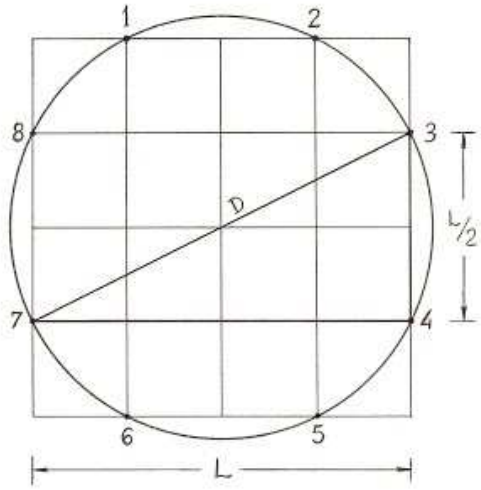
4.3 BLOCO III: INVESTIGAÇÃO-HISTÓRICA-COM-TECNOLOGIA PARA A UNIDADE DE GRANDEZAS E MEDIDAS NO 8º ANO.

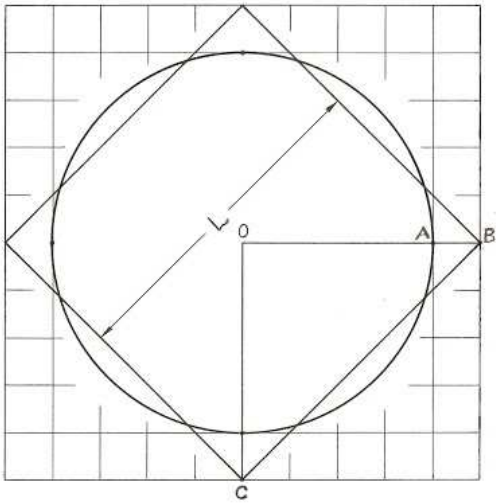
- **Objeto de Conhecimento**: Área de figuras planas.

- **Habilidade**: Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

- **Objetivos:** Apresentar o contexto histórico do surgimento da quadratura do círculo; resolver problemas que envolvam a quadratura de figuras planas; resolver um problema histórico por meio das TDIC;







O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO

Considerado como um dos três problemas clássicos da Grécia antiga juntamente com a duplicação do cubo e a trissecção do triângulo, o problema da quadratura do círculo consiste em:

"Construir um quadrado com área igual à de um círculo dado" (EVES, 2017, p. 134).

VAMOS INVESTIGAR O QUE? CONHECENDO O TEMA.

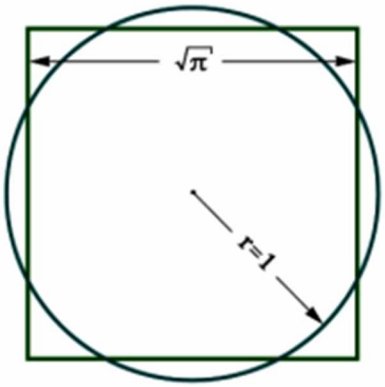
TEXTO EXPLORATÓRIO I

Apesar de ser considerado um problema clássico grego, a quadratura do círculo já era conhecida pelos egípcios. Provavelmente nenhum outro problema exerceu um fascínio maior ou mais duradouro do que aquele de construir um quadrado de área igual à área de um círculo dado. Já em 1800 a.c. os egípcios haviam 'resolvido' o problema, tomando o lado do quadrado igual a 8/9 do diâmetro do círculo dado.

A 'resolução' encontra-se no Papiro Rhind que atualmente é exposto no Museu Britânico e foi traduzido e explicado por Eisenlohr. Ele foi copiado por um escriba de nome Ahmes provavelmente cerca de 1700 a.c., e contém um relato dos mais velhos escritos da matemática egípcia.

No problema 50 do papiro de Rhind, segundo o escriba Ahmes sem mostrar qualquer explicação/motivo prévio por tais cálculos, a área de um círculo é calculada pela área de um quadrado cujo lado é o diâmetro diminuído de 1/9, isto é, a área de um círculo com diâmetro *d* é igual a área de um quadrado de lado 8d/9.

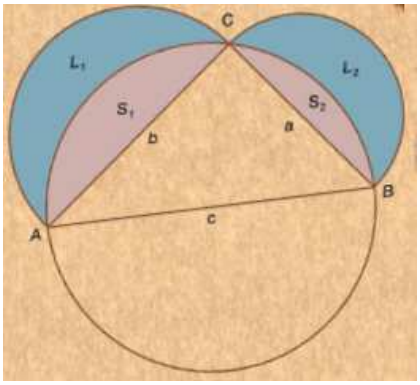
Assim, $A_q = (8/9d)^2$, onde A_q é a área do quadrado, conforme na figura abaixo.



Essa construção dos egípcios é considerada válida, pois a aproximação para π é de 3,1605 sendo muito próxima do valor assumido por ele atualmente.

O primeiro nome grego associado ao problema é o nome de Anaxágoras (499 a.c. - 427 a.c.), mas sua contribuição é desconhecida. Porém Hipócrates de Quio, teve sucesso na quadratura de certas lunas especiais, ou seja, figuras em forma de lua limitadas por dois arcos de circunferência, provavelmente na expectativa de que suas investigações pudessem levar à solução do problema da quadratura.

No seguinte caso, duas lunas desenvolvidas em torno do lado de um triângulo têm uma área combinada igual à do triângulo.



Outro grego a tentar quadrar o círculo foi Hípias de Elis (c. 425 a.c.) que inventou uma curva que se tornou conhecida como quadratriz ou trissectriz, pois, essa curva serve tanto para trissectar um ângulo quanto para quadrar um círculo.

Segundo Pinto (2015, pág. 21) "O problema de quadrar um círculo talvez tenha chegado aos gregos, possivelmente pelo interesse em se quadrar polígonos". Entre os diversos relatos que citam o surgimento da quadratura do círculo, destacamos aqui dois. O primeiro é de Zsabó (2000) que afirma que não só o problema da quadratura do círculo, mas como qualquer outro problema de quadratura se originou da quadratura do retângulo. O segundo é de Aristóteles, afirmando que o que é, por exemplo, a quadratura? É fazer equivaler um retângulo equilátero a um retângulo qualquer.

VAMOS EXPLORAR?

EXPLORAÇÃO 1

Utilizando o texto anterior que aborda um pouco da história da quadratura do círculo, responda os itens a seguir:

a) O que você entendeu por quadrar um círculo?

_____

_____

_____

_____

b) Alguém além dos gregos conseguiu quadrar um círculo? Se sim, a que conclusão eles chegaram?

_____

_____

_____

_____

c) Qual o possível motivo que levaram os gregos a estudar a quadratura do círculo?

_____

_____

_____

_____

d) Qual a contribuição de Hipócrates de Quio na quadratura do círculo?

_____

_____

_____

_____

e) Segundo o texto, qual a origem da quadratura do círculo?

_____

_____

_____

_____

f) Pesquise na internet outros matemáticos que tentaram quadrar um círculo.

_____

_____

_____

_____

EXPLORAÇÃO 2

Quadrando o círculo com o *software* Geogebra.

No papiro de Rhind observamos que a área de um círculo é calculada pela área de um quadrado cujo lado é o diâmetro diminuído de 1/9, isto é, a área de um círculo com diâmetro *d* é igual a área de um quadrado de lado 8d/9. Assim, $A_q = (8/9d)^2$, onde A_q é a área do quadrado.

Suponhamos que os egípcios queriam medir a área de um terreno quadrangular, porém só sabiam calcular a área de um círculo. Você agora é o matemático e vai fazer investigações com o apoio do *software* GeoGebra de forma a verificar as informações supracitadas sobre a quadratura do círculo pelos egípcios. Para tanto:

Procedimentos:

1. Selecione a ferramenta "controle deslizante" na barra de ferramentas, em seguida, clique na janela de visualização criando um seletor, após clicar na janela de visualização aparecerá um nova janela com as configurações do controle deslizante configure-a com intervalo de 1 a 5 e incremento 0,5;
2. Construa um segmento de reta de comprimento **a** utilizando a ferramenta "segmento com comprimento fixo";
3. Com a ferramenta polígono regular clicando nos pontos A e B, e um polígono de 4 lados;
4. Na barra de ferramentas, selecione o "círculo definido por três pontos", em seguida selecione três pontos do quadrado formado anteriormente.
5. Com a ferramenta "área", clique no quadrado e na circunferência construida;
6. Dê *play* no "controle deslizante" que fica na janela de álgebra.

a) A área do quadrado e do círculo são as mesmas? Justifique sua resposta.

_____

_____

_____

_____

_____

b) A área do quadrado obtido na construção do GeoGebra é $(8/9d)^2$? Qual a relação entre a área do quadrado e a área do círculo?

_____

_____

_____

_____

c) É possivel quadrar um círculo utilizando apenas a reguá e o compasso?

_____

_____

_____

_____

_____

d) Pesquise na internet se o problema da quadratura do círculo teve solução. Explique com suas palavras o resultado de sua pesquisa.

_____

_____

_____

_____

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC.** Versão final. Brasília, DF, 2017. 466p.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

CARVALHO, U. W. **PIGEONHOLE: qual é o significado e a tradução?** Tecla sap. 1997. Disponível em: < http://www.teclasap.com.br/pigeonhole-qual-e-o-significado-e-traducao/>. Acesso em: 02 nov. 201

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: 5 ed. UNICAMP, 2011.

HANZELET, J.A. **Récréation mathematicque composee de plusieurs problemes plaisants et facetieux.** Jean Appier Hanzelet (1624). Disponível em: <https://books.google.fr/books?id=QsY5AAAAcAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 19 out. 2018.

HEFEZ, A. ***Indução Matemática***. Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2007. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

LEURECHON, J. ***SelectæPropositiones in Tota Sparsim Mathematica Pulcherrimæ.*** Gasparem Bernardum1622. Disponível em: <https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-10537>. Acesso em: 19 out. 2018.

MERSENNE, Marin. ***La Vérité des sciences***. Toussainct du Bray (1625). Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k579276.image>. Acesso em: 16 out. 2018.

MIGUEL, A., MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: proposta e desafios. 2 ed. 1. Reimp. - Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J., OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3 ed. Ver. Ampl.- Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva. **#Contato Matemática.** 1 ed, vol. 3. São Paulo: FTD, 2016.

STEWART, I. **Uma história da simetria na matemática**. Ed. Zahar, 2012.

URBANEJA, G. P. M. Los orígenes de la Geometría Analítica. Catalunya, 2003-2004a. In: **XTEC - Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya. Disponível em:** <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>. Acesso em: 05 jan. 2019.

URBANEJA, G. P. M. Estudio Crítico de Tres Obras Cumbres de la Literatura Matemática: Los Elementos de Euclides. Catalunya, 2003-2004b. In: **XTEC - Xarxa**

Telemàtica Educativa de Catalunya. Disponível em: <http://www.xtec.cat /sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides1.pdf>. Acesso em: 05 mar. 2019.
WEYL, H. **Symmetry**. Princeton: Princeton University Press, 1952.

Cronograma

Encontro:	Atividade realizada:	Local:	Quantidade de aulas
1º Encontro	Introdução do caderno de atividades (apresentação de slides). Início do bloco I: investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de Números, Probabilidade e Estatística no 8º ano. Leitura do texto exploratório (vamos investigar o que? conhecendo o tema: A história do princípio da casa dos pombos). Início das atividades vamos explorar? Exploração I.	Sala de aula	4 aulas de 50 minutos
2º Encontro	Bloco II: Tutorial sobre o Excel e continuação das atividades vamos explorar? Exploração II.	Sala de aula	2 aulas de 50 minutos
3º Encontro	Produção do relatório do Bloco I	Sala de aula	1 aula de 50 minutos
4º Encontro	Início do bloco II: investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de Álgebra e Geometria no 8º ano. Leitura dos textos exploratórios (vamos investigar o que? conhecendo o tema: o que é um plano cartesiano e o que é simetria). Início das atividades vamos explorar? Exploração I.	Sala de aula	4 aulas de 50 minutos
5º Encontro	Bloco II: Continuação das atividades vamos explorar? Exploração II.	Sala de aula	4 aulas de 50 minutos
6º Encontro	Produção do relatório do Bloco II	Sala de aula	1 aula de 50 minutos
7º Encontro	Início do bloco III: investigação-histórica-com-tecnologia para a unidade de Grandezas e Medidas no 8º ano. Leitura do texto exploratório (vamos investigar o que? conhecendo o tema: o problema da quadratura do círculo). Início das atividades vamos explorar? Exploração I.	Sala de aula	2 aulas de 50 minutos
8° Encontro	Bloco III: Continuação das atividades vamos explorar? Exploração II.	Sala de aula	2 aulas de 50 minutos
9º Encontro	Produção do relatório do Bloco III	Sala de aula	1 aula de 50 minutos

Giselle Costa de Sousa

Possui graduação em Matemática - licenciatura e bacharelado - pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2001 e 2003) e mestrado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2005), na linha de pesquisa em Educação Matemática. É doutora em Educação (linha Educação Matemática) pela UFRN (2008). Além disso, concluiu o curso de técnico em Estradas pela ETFRN, hoje IFRN (1997). Atualmente é professora associada do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da UFRN. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em História da Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: História da Matemática, Relações entre Hist. da Matemática e TDIC, Geogebra, Cálculo, Educação Matemática, Lógica e George Boole. Atuou como professora convidada no Instituto de Formação Superior Presidente Kennedy - IFESP (2007). Foi professora da rede básica de ensino do município de Natal, do município de São Gonçalo do Amarante (RN) e da rede privada de ensino. Foi coordenadora do PIBID de Matemática da UFRN/Natal de 2008 a 2018.

Alison Luan Ferreira da Silva

Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (2014), pós graduação em ensino da Matemática para o ensino médio pelo Instituto Federal de Pernambuco (2016) e mestrado profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2019), na linha de pesquisa em Educação Matemática. Atualmente é professor de Matemática do Governo do Estado do Rio Grande do Norte Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em História da Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: História da Matemática, Relações entre Hist. da Matemática e TDIC, GeoGebra.